

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ**

**до виконання розрахункового завдання**

**«Побудова математичних моделей динамічних систем**

**та розв'язання задачі модального керування»**

**з курсу «Теорія керування»**

для студентів напрямків 6.040301 «Прикладна математика»,  
6.040302 «Інформатика» та 6.040303 «Системний аналіз»

Затверджено  
редакційно-видавничою  
радою університету,  
протокол № 2 від 06.12.2012 р.

Харків  
НТУ «ХПІ»

2014

Методичні вказівки до виконання розрахункового завдання «Побудова математичних моделей динамічних систем та розв'язання задачі модального керування» з курсу «Теорія керування» для студентів напрямків 6.040301 «Прикладна математика», 6.040302 «Інформатика» та 6.040303 «Системний аналіз» / уклад. Ю.І. Дорофєєв, О.В. Костюк. – Харків: НТУ «ХП», 2012. – 44 с.

Укладачі:           Ю.І. Дорофєєв  
                              О.В. Костюк

Рецензент           Л.М. Любчик

Кафедра системного аналізу і управління  
Кафедра комп'ютерної математики і математичного моделювання

## ВСТУП

Метою виконання розрахункового завдання є придбання студентами навичок побудови математичних моделей лінійних динамічних систем, перетворення моделей, дослідження їх часових і частотних характеристик, а також розв'язання задачі модального керування динамічними об'єктами. Побудова та дослідження моделей динамічних систем є необхідним етапом вирішення різноманітних задач аналізу і синтезу систем автоматичного керування.

В теперішній час для аналізу і проектування систем керування застосовуються спеціалізовані пакети програм. Одним із широко використовуваних пакетів є програмний комплекс MATLAB, вироблений фірмою MathWorks, Inc – математична лабораторія, призначена для різноманітних технічних обчислень. До складу MATLAB включений набір пакетів розширення для різноманітних областей комп'ютерної математики. Специфічні команди і процедури, призначені для розв'язання задач теорії керування, об'єднані в Control System Toolbox, при реалізації якого використані принципи об'єктно-орієнтованого програмування. Серед імітаційного моделювання Simulink, яка також входить до складу MATLAB, дозволяє швидко і наочно синтезувати моделі різноманітних динамічних систем, а також виконувати чисельне моделювання.

Дане розрахункове завдання призначено для студентів напрямків 6.040301 «Прикладна математика», 6.040302 «Інформатика» та 6.040303 «Системний аналіз» і спрямовано на набуття практичних навичок використання сучасних програмних засобів для розв'язання задач аналізу та синтезу систем керування лінійними динамічними об'єктами.

# 1 ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

## 1.1 Математичні моделі лінійних динамічних систем

Динамічні системи знайшли широке застосування в різних областях людської діяльності. Вони характеризуються залежністю використовуваних змінних від часу, а також залежністю вихідного сигналу в окремі моменти часу від передісторії вхідного сигналу.

Оскільки для моделювання систем і процесів використовуються математичні моделі, розглянемо конкретні форми математичного опису динамічних систем різними математичними формалізмами. Для математичного опису лінійних систем застосовуються такі способи:

- диференціальні рівняння;
- моделі в просторі станів;
- моделі в змінних «вхід-вихід» (передавальні функції).

Перші два способи називаються часовими, оскільки вони описують поведінку системи в часовій області і відображають внутрішні зв'язки між сигналами. Передавальні функції відносяться до частотних способів опису, оскільки безпосередньо пов'язані з частотними характеристиками системи і відбивають тільки зв'язки між вхідними і вихідними сигналами.

Частотні способи опису дозволяють застосовувати для аналізу і синтезу систем алгебраїчні методи, що часто спрощує розрахунки. З іншого боку, для автоматичних обчислень більш придатні методи, засновані на моделях в просторі станів, оскільки вони використовують обчислювально стійкі алгоритми лінійної алгебри.

Вихідні рівняння динаміки об'єктів, які будуються на основі законів фізики, мають вигляд нелінійних диференціальних рівнянь. Для наближеного аналізу і синтезу зазвичай проводять їх лінеаризацію в околі сталого режиму і отримують лінійні диференціальні рівняння.

Лінійне рівняння

$$\alpha_n y^{(n)}(t) + \dots + \alpha_1 \dot{y}(t) + \alpha_0 y(t) = \beta_m u^{(m)}(t) + \dots + \beta_1 \dot{u}(t) + \beta_0 u(t)$$

можна записати в операторній формі

$$(\alpha_n + \dots + \alpha_0)y(t) = (\beta_m + \dots + \beta_0)u(t) \text{ або } \alpha(p)y(t) = \beta(p)u(t),$$

де  $u(t)$  – вхідний сигнал,  $y(t)$  – вихідний сигнал,  $p = d/dt$  – оператор дифе-

ренціювання,  $\alpha(p) = \alpha_n + \dots + \alpha_0$  і  $\beta(p) = \beta_m + \dots + \beta_0$  – операторні поліноми.

Передавальна функція (ПФ)  $W(s)$  лінійної стаціонарної системи від комплексної змінної  $s$  визначається як відношення перетворення Лапласа вихідного сигналу до перетворення Лапласа вхідного сигналу при нульових початкових умовах

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}, \quad Y(s) = \int_0^{\infty} y(t)e^{-st} dt, \quad U(s) = \int_0^{\infty} u(t)e^{-st} dt.$$

Передавальна функція збігається з відношенням операторних поліномів  $\alpha(p)/\beta(p)$  при заміні змінної  $p$  на  $s$ .

ПФ в середовищі MATLAB вводиться у вигляді відношення двох поліномів від комплексної змінної  $s$ . Поліноми зберігаються як масиви коефіцієнтів, записаних у порядку убудування ступенів. Наприклад, ПФ

$$W(s) = \frac{2s+4}{s^3+1.5s+1} \text{ вводиться наступним чином }^1:$$

```
>> numerator = [2 4]
numerator =
    2    4
>> denominator = [1 0 1.5 1]
denominator =
    1.0000    0.0000    1.5000    1.0000
>> system = tf ( numerator, denominator )
Transfer function:
    2 s + 4
    -----
    s^3 + 1.5 s + 1
```

або відразу, без попередньої побудови чисельника і знаменника:

```
>> system = tf ( [2 4], [1 0 1.5 1] );
```

В робочому середовищі MATLAB створюється об'єкт класу **tf**, який описує передавальну функцію. Крапка з комою в кінці команди забороняє вивід результатів на екран.

Для опису багатозв'язних систем найбільш адекватними є моделі в просторі станів. Стан динамічної системи визначається найменшим набором параметрів, які необхідно задати в початковий момент для того, щоб

<sup>1</sup> На сірому фоні наводяться відповіді середовища MATLAB.

правильно передбачити подальшу поведінку системи при відомому вхідному впливі. Якщо, наприклад, розглядається система диференціальних рівнянь  $n$ -го порядку, то для отримання однозначного і правильного рішення треба розташовувати числом змінних стану, яке дорівнює  $n$ .

Загального визначення поняття стану системи не існує, так як для кожної системи воно різне. Але вибирають змінні стану так, щоб вони мали певний фізичний сенс. При цьому вибір змінних стану не є однозначним. Це говорить про те, що для одного і того ж об'єкта можуть бути обрані різні набори змінних стану, а значить і різні описи об'єкта, тобто одна і та ж система може мати декілька моделей у просторі станів.

Модель динамічної системи в просторі станів пов'язана із записом диференціальних рівнянь в стандартній формі Коші (у вигляді системи рівнянь першого порядку):

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t), \\ y(t) &= \mathbf{C}x(t) + \mathbf{D}u(t),\end{aligned}\tag{1.1}$$

де  $x(t)$  – вектор змінних стану розміру  $n \times 1$ ,  $u(t)$  – вектор вхідних сигналів (вектор управління) розміру  $m \times 1$ ,  $y(t)$  – вектор вихідних сигналів розміру  $p \times 1$ ,  $\mathbf{A}$  – матриця динаміки системи розмірності  $n \times n$ ,  $\mathbf{B}$  – матриця входів розмірності  $n \times m$ ,  $\mathbf{C}$  – матриця виходів розмірності  $p \times n$ ,  $\mathbf{D}$  – матриця обходів розмірності  $p \times m$ .

Наприклад, модель у просторі станів, яка визначається набором матриць

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 8 & 9 \end{bmatrix}, \mathbf{D} = 0 \text{ вводиться наступним чином:}$$

```
>> A = [-1 -2; 3 4];
>> B = [5; 6];
>> C = [7 8 9];
>> D = 0;
>> system = ss ( A, B, C, D );
```

Для перетворення передавальної функції в модель у просторі станів використовується команда

```
>> tf_system = ss ( system );
```

Однак, модель у просторі станів можна побудувати лише для тих передавальних функцій, для яких виконується умова фізичної реалізації, тобто у яких ступінь чисельника не вище, ніж ступінь знаменника.

Розглядаючи різні форми подання рівнянь в просторі станів, виділяють довільні (коли змінні стану вибираються без накладення на них будь-яких спеціальних вимог) і стандартизовані форми, до яких відносяться:

1) канонічна *діагональна* форма, яка призводить до зручної діагональної матриці динаміки, у якої елементами головної діагоналі є полюси передавальної функції системи (власні числа матриці динаміки):  $\mathbf{A} = \text{diag} \{ \lambda_1, \dots, \lambda_n \}$ ;

2) *нормальна* форма запису рівнянь стану, коли в якості змінних стану вибирають вхідний сигнал і  $\frac{d}{dt}$  його похідні, являє собою, по суті, опис системи у фазовому просторі. Фазові координати виступають як змінні стану (і навпаки). У цьому випадку матриця динаміки має вигляд

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{E}_{(n-1) \times (n-1)} & \\ 0 & & & \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Таким чином, стандартизовані форми зображення систем в просторі станів дозволяють скоротити обсяги обчислень при моделюванні за рахунок більш простого виду матриць динаміки систем.

## 1.2 Часові характеристики лінійних динамічних систем

Для оцінки динамічних властивостей систем прийнято досліджувати їх часові характеристики.

Часовою характеристикою називається реакція динамічної системи на вхідну дію певного виду (тобто зміна амплітуди вихідного сигналу системи з плином часу).

Основними часовими характеристиками, які використовуються при аналізі динамічних систем, є імпульсна і перехідна характеристики.

*Імпульсною* характеристикою (ваговою функцією)  $w(t)$  називається реакція системи на одиничний нескінченний імпульс (дельта-функцію або

функцію Дірака) при нульових початкових умовах. Дельта-функція  $\delta(t)$  визначається рівностями

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t = 0 \end{cases}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

Друга назва – вагова функція – пов'язана з тим, що для довільного вхідного сигналу  $u(t)$  вихід системи  $y(t)$  обчислюється як згортка вхідного сигналу і вагової функції системи

$$y(t) = \int_0^t u(\tau) w(t-\tau) d\tau = \int_0^t u(t-\tau) w(\tau) d\tau.$$

Отже функція  $w(t)$  як би «зважає» вхідний сигнал в підінтегральному виразі.

Передавальна функція динамічної системи є перетворенням Лапласа від її вагової функції  $W(s) = \int_0^{\infty} w(t) e^{-st} dt$ .

*Перехідною* характеристикою  $h(t)$  називається реакція системи (при нульових початкових умовах) на одиничний ступінчастий сигнал (функцію Хевісайда), який визначається наступним чином:  $1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$ .

Імпульсна та перехідна функції пов'язані виразом  $h(t) = \int_0^t w(\tau) d\tau$ .

Для побудови часових характеристик системи **system** в середовищі MATLAB використовуються спеціальні команди:

```
>> impulse ( system ); % імпульсна характеристика
```

```
>> step ( system ); % перехідна характеристика
```

При цьому час моделювання визначається автоматично так, щоб відобразити основні особливості характеристики.

По перехідній характеристиці можна знайти найважливіші показники якості системи – перерегулювання (overshoot) і тривалість перехідного процесу (settling time).



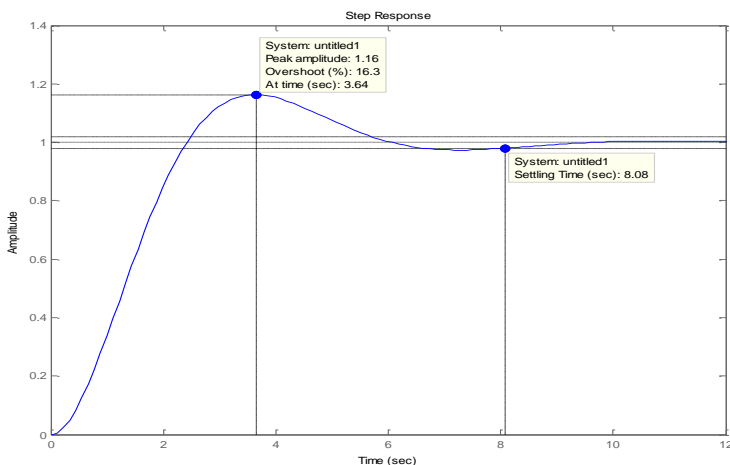


Рисунок 1.1 – Графік перехідної характеристики динамічної системи

Перерегулювання визначається як  $\sigma = \frac{h_{\max} - h_{\infty}}{h_{\infty}} \times 100\%$ , де  $h_{\max}$  – макси-

мальне значення функції  $h(t)$ , а  $h_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t)$  – усталене значення виходу.

*Тривалість перехідного процесу* – це час, після якого сигнал виходу відрізняється від усталеного значення не більше, ніж на задану малу величину (в середовищі MATLAB за замовчуванням використовується точність 2%).

Для побудови графіка реакції системи на довільні вхідні впливи використовується команда **lsim**. Наприклад, побудуємо графік реакції системи **system** на синусоїдальний вхідний сигнал з амплітудою 3 і тривалістю 10 сек:

```
>> t = 0:0.01:10; % Період дискретизації дорівнює 0.01
>> u = sin(3*t);
>> lsim (system, u, t);
```

## 1.4 Частотні характеристики лінійних динамічних систем

При подачі на вхід лінійної динамічної системи гармонійного сигналу  $u(t) = \sin \omega t$  з частотою  $\omega$  (вона вимірюється у радіанах в секунду), на

виході буде також гармонійний сигнал тієї ж частоти, але іншої амплітуди і фази  $y(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$ , де  $A$  – амплітуда та  $\varphi$  – зсув фази.

Частотна характеристика визначається як реакція системи на комплексний експоненціальний сигнал  $e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$ . Для її побудови треба використовувати підстановку  $s = i\omega$  в передавальній функції  $W(s)$ . Вираз  $W(i\omega)$  називається частотною передавальною функцією або *амплітудно-фазовою частотною характеристикою* системи (АФЧХ).

Залежність модуля величини  $W(i\omega)$  від частоти називається амплітудною частотною характеристикою (АЧХ), а залежність аргументу комплексного числа (фази)  $W(i\omega)$  від частоти – фазовою частотною характеристикою (ФЧХ):

$$A(\omega) = |W(i\omega)|, \quad \varphi(\omega) = \arg W(i\omega) = \arctg \frac{\operatorname{Im} W(i\omega)}{\operatorname{Re} W(i\omega)}.$$

АЧХ показує, у скільки разів посилюється амплітуда сигналів різних частот після проходження через систему, а ФЧХ характеризує зсув фази сигналу.

Реальні об'єкти мають фізично реалізовану передавальну функцію, тому їх АЧХ спадає з ростом частоти і асимптотично наближається до нуля. Кажуть, що такий об'єкт має властивість фільтра – фільтрує (не пропускає) високочастотні сигнали (перешкоди, шуми вимірювань).

Частота, після якої значення АЧХ зменшується нижче 0 дБ (коефіцієнт підсилення менше 1, тобто сигнал послаблюється), називається *частотою зрізу* системи  $\omega_c$ .

Максимум АЧХ відповідає частоті, на якій підсилення найбільше.

Для систем з інтегруючими ланками частотна характеристика прямує до нескінченності при  $\omega \rightarrow 0$ . Це означає, що їх вихід нескінченно збільшується або зменшується при постійному вхідному сигналі.

Щоб побудувати частотні характеристики в MATLAB, треба спочатку створити масив частот в потрібному діапазоні. Для цього можна використовувати функції **linspace** (рівномірний розподіл точок за лінійною шкалою) або **logspace** (рівномірний розподіл точок за логарифмічною шкалою). Наприклад,

```
>> w = linspace (0, 10, 100);
```

```
>> w = logspace (-1, 2, 50);
```

перша команда будує масив зі 100 точок з рівномірним кроком в інтервалі від 0 до 10, а друга – масив з 50 точок з рівномірним кроком по логарифмічній шкалі в інтервалі від  $10^{-1}$  до  $10^2$ .

Частотна характеристика на сітці **w** для лінійної моделі **system** (заданої як передавальна функція або модель у просторі станів) обчислюється за допомогою функції **freqresp**:

```
>> r = freqresp(system, w);
```

Функція **freqresp** повертає тривимірний масив. Це пов'язано з тим, що вона застосовується і для багатовимірних моделей (з кількома входами і виходами), передавальна функція яких уявляє собою матрицю. Перші два індекси позначають рядок і стовпець у цій матриці, а третій – номер точки частотної характеристики. Для системи з одним входом і одним виходом зручно перетворити тривимірний масив в одновимірний за допомогою команди

```
>> r = r(:);
```

Для виведення графіка АЧХ на екран можна використовувати одну з команд:

```
>> plot ( w, abs(r) );
```

```
>> semilogx ( w, abs(r) );
```

```
>> loglog ( w, abs(r) );
```

У першому випадку масштаб обох осей координат лінійний, у другому випадку використовується логарифмічний масштаб по осі абсцис (частот), в останньому - логарифмічний масштаб по обох осях. Для обчислення фази (у градусах) використовується команда

```
>> phi = angle(r)*180/pi;
```

після чого можна будувати ФЧХ, наприклад:

```
>> semilogx ( w, phi );
```

Для побудови амплітудно-фазової частотної характеристики (годографа Найквіста) для моделі **system** використовується команда

```
>> nyquist ( system );
```

## 1.4 Оформлення графіків в MATLAB

Для створення нового графічного вікна для рисунка в MATLAB використовується команда

```
>> figure(1);
```

Замість одиниці можна ставити будь-який номер рисунка. Якщо рисунок з таким номером вже є, він стає активним і виводиться на перший план. Якщо такого рисунка немає, він створюється і стає активним.

В MATLAB є можливість будувати декілька графіків на одному рисунку. Інакше кажучи, рисунок можна представити у вигляді таблиці, у кожній комірці якої будується окремий графік. Для цього треба зробити активним потрібний рисунок і застосувати команду

```
>> subplot(2, 1, 1);
```

Перший аргумент показує кількість рядків в таблиці, другий – кількість стовпців, третій – який за рахунком графік зробити активним (рахуючи по рядках, зліва направо і зверху вниз). Всі подальші команди (**plot**, **title**, **xlabel**, **ylabel**, **legend** та ін.) відносяться до цього «підграфіка».

За допомогою команди **plot** можна будувати кілька графіків в одних вісях. Для цього серед аргументів перераховуються пари масивів:

```
>> plot(x, y, v, z);
```

Перший графік буде відображати залежність **y** від **x**, а другий – залежність **z** від **v**. Масиви в кожній парі мають бути однакової довжини. При бажанні можна вказати колір для кожної лінії. Наприклад,

```
>> plot(x, y, 'b', v, z, 'g');
```

Перша лінія (залежність **y** від **x**) буде синьою, друга (залежність **z** від **v**) – зеленою. Можна використовувати наступні кольори:

<b>b</b> – синій ( <b>blue</b> );	<b>m</b> – фіолетовий ( <b>magenta</b> );
<b>g</b> – зелений ( <b>green</b> );	<b>y</b> – жовтий ( <b>yellow</b> );
<b>r</b> – червоний ( <b>red</b> );	<b>k</b> – чорний ( <b>black</b> ).
<b>c</b> – блакитний ( <b>cyan</b> );	

За замовчуванням перша лінія – синя, друга – зелена і т.д. в порядку перерахування кольорів у списку. Додатково можна вказати тип лінії:

- суцільна;	- . штрих-пунктирна;
: крапкова;	-- штрихова.

Наприклад,

```
>> plot(x, y, 'b:', v, z, 'g--');
```

Перша лінія – крапкова синього кольору, друга – штрихова зеленого кольору. За замовчуванням усі лінії суцільні.

Для оформлення графіка також використовуються команди:

**title**            заголовок графіка;

**xlabel**          назва осі абсцис;

**ylabel**          назва осі ординат.

У всіх цих команд обов'язковий один аргумент – текст в апострофах.

Команда **legend** служить для виведення легенди графіка. Легенда потрібна, якщо на графіку є кілька ліній і треба показати, що позначає кожна з них. Параметрами команди **legend** є символічні рядки, їх повинно бути стільки, скільки побудовано ліній.

## 1.5 Задача модального керування

Динамічні властивості системи автоматичного управління визначаються коріннями характеристичного рівняння  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , яким, у свою чергу, відповідають складові вільного руху системи, які називають «модами»  $y_i(t) = e^{\lambda_i t}, i = \overline{1, n}$ .

Модальне керування – це таке керування, коли досягається потрібний характер перехідних процесів за рахунок забезпечення необхідного розташування коренів характеристичного полінома на комплексній площині. При цьому задача зводиться до визначення коефіцієнтів відповідних зворотних зв'язків за станом об'єкта. Модальне керування застосовується тоді, коли всі складові вектора стану об'єкта доступні для безпосереднього вимірювання.

Розглянемо послідовність розв'язання задачі модального керування.

Нехай повністю керований і спостережуваний об'єкт заданий моделлю в просторі станів (1.1), яка має вигляд канонічної нормальної форми. Розмірність вектора керуючих впливів дорівнює  $\dim u(t) = 1$ , тобто керування є скалярним.

Сформуємо зворотний зв'язок за станом наступним чином:

$$u(t) = -K^T x(t), \quad (1.2)$$

де  $K^T$  – вектор-рядок коефіцієнтів зворотних зв'язків.

Тоді, підставивши рівняння (1.2) в (1.1), одержимо рівняння динаміки замкненої системи:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & \vdots & \mathbf{E}_{(n-1) \times (n-1)} \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} x(t) - \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \beta_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \dots & k_n \end{bmatrix} x(t) = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \vdots & \mathbf{E}_{(n-1) \times (n-1)} \\ -\alpha^T & -\beta_0 K^T \end{bmatrix} x(t) = \mathbf{A}_{\text{замк}} x(t), \end{aligned} \quad (1.3)$$

Характеристичний поліном отриманої замкненої системи визначається наступним чином:

$$\alpha_{\text{замк}}(s) = \det(\mathbf{E} - \mathbf{A}_{\text{замк}}) = -\alpha^T - \beta_0 K^T. \quad (1.4)$$

Тоді задача модального керування може бути сформульована таким чином: для керованої системи (1.1) з характеристичним поліномом знайти вектор коефіцієнтів зворотних зв'язків  $K$  такий, щоб замкнена система (1.3) мала бажану стандартну форму характеристичного полінома (1.4).

Процедура розрахунку коефіцієнтів зворотних зв'язків виконується наступним чином.

Вибирається бажане розташування коренів характеристичного рівняння замкненої системи  $\lambda_1^*, \dots, \lambda_n^*$ . Для цього використовуються наступні співвідношення.

Тривалість перехідного процесу оцінюється за *ступенем стійкості*  $\eta$  замкненої системи. Так називається відстань від самого правого кореня характеристичного рівняння до уявної осі. Зазвичай приймається

$$T_{\Pi} \approx -\frac{\ln \varepsilon}{\eta},$$

де  $\varepsilon$  – величина допустимої помилки.

Таким чином, при обмеженні лише на  $T_{\Pi}$  область допустимого розташування коренів  $\lambda_i^*$  уявляє собою напівплощину  $\text{Re } \lambda_i^* < -\frac{\ln \varepsilon}{T_{\Pi}}$ .

Число  $\mu$  називають *коливальністю* системи, величина якої визначається як тангенс кута розкриття сектора, усередині якого лежать усі полюси системи

$$\mu = tg \frac{|\operatorname{Im} \lambda_i^*|}{|\operatorname{Re} \lambda_i^*|}.$$

Перерегулювання (у відсотках) оцінюється за формулою

$$\sigma \approx e^{\frac{\pi}{\mu}} \times 100\%.$$

Кожному значенню перерегулювання відповідає свій сектор, який обмежує розташування полюсів.

Таким чином, при використанні двох обмежень (перше – на  $T_{II}$ , друге – на  $\sigma$ ) область допустимого розташування коренів характеристичного рівняння замкненої системи уявляє собою усічений сектор в лівій напівплощині комплексної площини.

Після вибору полюсів замкненої системи обчислюють її характеристичний поліном за допомогою формули

$$\alpha^*(s) = \prod_{i=1}^n (s - \lambda_i^*).$$

Прирівнюючи поліноми  $\alpha_{\text{замк}}(s)$  та  $\alpha^*(s)$ , отримані на першому та другому кроках, отримуємо рівняння для визначення невідомих коефіцієнтів зворотних зв'язків

$$-\alpha^T - \beta_0 K^T = -\alpha^{*T},$$

звідки отримуємо:

$$k_{i+1} = \frac{\alpha_i^* - \alpha_i}{\beta_0}, \quad i = \overline{0, n-1}. \quad (1.5)$$

Таким чином, при можливості вимірювання всіх компонент вектора стану об'єкта за допомогою вибору коефіцієнтів зворотних зв'язків за формулою (1.5) можна отримати будь-яке бажане розташування полюсів замкненої системи.

## 2 ВАРІАНТИ РОЗРАХУНКОВОГО ЗАВДАННЯ

Зміст завдання.

1. Знайти передавальну функцію об'єкта керування.
2. Побудувати графік перехідної характеристики об'єкта при нульових початкових умовах і дослідити вплив першого варійованого параметра на вид характеристики.
3. Побудувати графік логарифмічної амплітудно-частотної характеристики об'єкта і дослідити вплив другого варійованого параметра на вид характеристики.
4. Вирішити задачу реалізації об'єкта в просторі станів у вигляді канонічної нормальної форми.
5. Нарисувати структурну схему отриманої реалізації.
6. Побудувати графік руху об'єкта при заданих ненульових початкових умовах.
7. Перевірити виконання умови керованості для заданого об'єкта.
8. Вирішити задачу модального керування об'єктом так, щоб виконувалися наступні вимоги до якості перехідного процесу в замкненій системі:
  - а) точність дорівнює заданій величині  $\varepsilon$  ;
  - б) тривалість перехідного процесу не перевищує задану величину  $T_n$  ;
  - в) коливальність дорівнює заданій величині  $\mu$  .
9. Побудувати графік перехідного процесу в замкненій системі.

Таблиця 2.1 – Досліджувані параметри та значення показників якості

№ варіанта	Перший варійований параметр	Другий варійований параметр	Точність $\varepsilon$	Тривалість перехідного процесу $T_n$	Коливальність $\mu$
1	2	3	4	5	6
1	Довжина маятника $l$	Довжина маятника $l$	$0,1^\circ$	10 сек	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
2	Ємність конденсатора $C$	Опір резистора $R$	0,01 В	2 сек	0



1	2	3	4	5	6
3	–	Довжина маятника $l$	$0,1^\circ$	5 сек	1
4	Опір резистора $R$	Індуктивність котушки $L$	$0,01\text{ В}$	10 сек	0
5	Маса вантажу $m$	Жорсткість підвіски $c$	1 см	10 сек	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
6	Опір резистора $R$	Ємність конденсатора $C$	$0,1\text{ В}$	10 сек	0
7	Щільність газу $\rho$	Жорсткість пружини $c$	$0,01^\circ$	30 сек	$\sqrt{3}$
8	Індуктивність котушки $L$	Опір резистора $R$	$0,01\text{ В}$	2 сек	0
9	Відстань між опорами $s$	Маса вантажу $m$	1 см	30 сек	$\sqrt{3}$
10	Ємність конденсатора $C$	Опір резистора $R$	$0,01\text{ В}$	2 сек	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
11	Жорсткість пружини $c$	Маса вантажу $m$	$0,01^\circ$	20 сек	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
12	Ємність конденсатора $C$	Опір резистора $R$	$0,01\text{ В}$	10 сек	$\sqrt{3}$
13	Площа основи $S$	Щільність пробки $\rho_n$	$0,1\text{ см}$	2 сек	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
14	Ємність конденсатора $C$	Опір резистора $R$	$0,01\text{ В}$	5 сек	1
15	Точкова маса $m$	Радіус кільця $R$	10 см	10 сек	1
16	Опір резистора $R_3$	Ємність конденсатора $C_1$	$0,1\text{ В}$	5 сек	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
17	Маса поршня $m$	Відстань $l$	1 см	5 сек	$\sqrt{3}$
18	Опір резистора $R_2$	Ємність конд-ра $C$	$0,1\text{ В}$	10 сек	$\sqrt{3}$

*Варіант 1.*

Об'єктом керування є математичний маятник, довжина якого  $l = 40$  м. Нехай  $\varphi(t)$  – це кут відхилення маятника від строго вертикального положення в момент часу  $t$  (див. рис. 2.1).

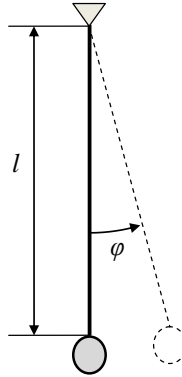


Рисунок 2.1 – Схема математичного маятника

При малих відхиленнях від положення рівноваги рух маятника описується наступним лінеаризованим диференціальним рівнянням:

$$\ddot{\varphi}(t) + \frac{g}{l}\varphi(t) = u(t), \quad \varphi(t_0) = \varphi_0, \quad \dot{\varphi}(t_0) = \ddot{\varphi}(t_0) = 0,$$

де  $g$  – прискорення вільного падіння,  $u(t)$  – керуючий вплив.

У початковий момент часу відхилення від положення рівноваги становить  $\varphi_0 = 1^\circ$ .

*Варіант 2.*

Об'єктом керування є  $RC$ -ланка, у якому опір резистора дорівнює  $R = 5$  кОм, а ємність конденсатора  $C = 0,2$  мкФ. Принципова схема об'єкта наведена на рис. 2.2.

Аналіз процесів в електричних ланцюгах дозволяє встановити, що падіння напруги на опорі дорівнює різниці між вхідною і вихідною напругами  $u_R(t) = u_1(t) - u_2(t)$ .

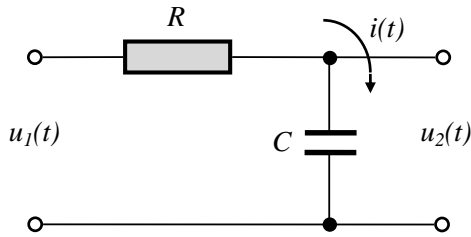


Рисунок 2.2 – Принципова схема динамічної системи «RC - ланка»

Напруга  $u_R(t)$  визначає струм  $i(t) = \frac{1}{R} u_R(t)$ .

Заряд конденсатора визначається рівнянням  $q(t) = q_0 + \int_0^t i(\tau) d\tau$ .

Напруга на конденсаторі, яка визначається його зарядом, є виходом даної системи  $u_2(t) = u_C(t) = \frac{1}{C} q(t)$ .

Таким чином, наведена схема забезпечує вироблення вихідної напруги, яка описується таким диференціальним рівнянням:

$$\frac{du_2(t)}{dt} + \frac{1}{RC} u_2(t) = \frac{1}{RC} u_1(t),$$

$$u_1(t_0) = u_1^0, \quad \frac{du_2(t_0)}{dt} = u_2(t_0) = 0.$$

В початковий момент часу вхідна напруга дорівнює  $u_1^0 = 5 \text{ В}$ .

### Варіант 3.

Об'єктом керування є перевернутий маятник з переміщуваною точкою опори, схема якого наведена на рис. 2.3.

На рисунку прийняті наступні позначення:  $\varphi(t)$  – величина кута відхилення маятника від вертикального положення в момент часу  $t$ ;  $u(t)$  – величина горизонтального зміщення точки опори в площині хитання маятника;  $l = 20 \text{ м}$  – довжина маятника. При малих відхиленнях рух маятника описується наступним лінеаризованим диференціальним рівнянням:

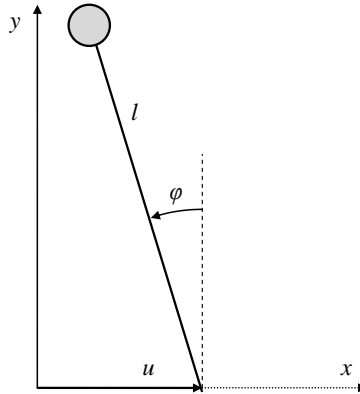


Рисунок 2.3 – Схема перевернутого маятника

$$\ddot{\varphi}(t) - \frac{g}{l} \varphi(t) = \frac{1}{l} u(t), \quad \varphi(t_0) = \varphi_0, \quad \ddot{\varphi}(t_0) = 0,$$

де  $g$  – прискорення вільного падіння.

У початковий момент часу відхилення від положення рівноваги становить  $\varphi_0 = 1^\circ$ .

#### Варіант 4.

Об'єктом керування є  $LR$ - ланка, у якій опір резистора дорівнює  $R = 10 \text{ Ом}$ , а індуктивність котушки  $L = 50 \text{ Гн}$ . Принципова схема об'єкта наведена на рис. 2.4.

Аналіз процесів в електричних ланцюгах дозволяє встановити, що падіння напруги на індуктивності дорівнює різниці між вхідною і вихідною напругами  $u_L(t) = u_1(t) - u_2(t)$ .

Напруга  $u_L(t)$  визначає струм  $i(t) = L \frac{di(t)}{dt}$ .

Струм  $i(t)$  створює падіння напруги на опорі  $R$ , яка є виходом даної системи  $u_2(t) = u_R(t) = R \cdot i(t)$ .

Таким чином, наведена схема забезпечує вироблення вихідної напруги, яка описується таким диференціальним рівнянням:

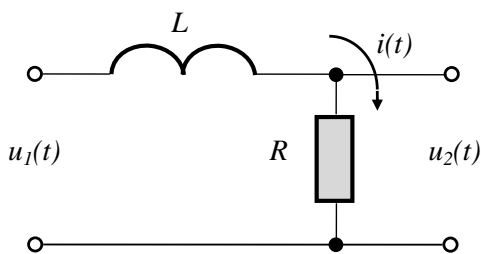


Рисунок 2.4 – Принципова схема динамічної системи «LR - ланка»

$$\frac{du_2(t)}{dt} + \frac{R}{L}u_2(t) = \frac{R}{L}u_1(t), \quad u_1(t_0) = u_1^0, \quad \frac{du_2(t_0)}{dt} = u_2(t_0) = 0.$$

У початковий момент часу вхідна напруга дорівнює  $u_1^0 = 10 \text{ В}$ .

#### Варіант 5.

Об'єктом керування є динамічна система, яка являє собою підресорений вантаж масою  $m = 0.7 \text{ кг}$ , прикріплений до колеса, яке рухається з постійною горизонтальною швидкістю, схема якої наведена на рис. 2.5.

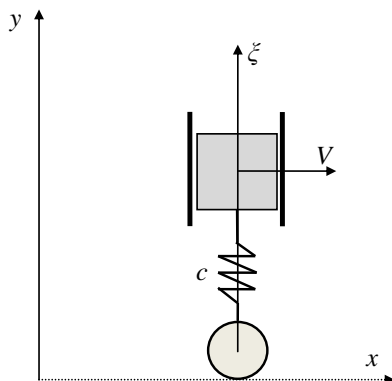


Рисунок 2.5 – Схема динамічної системи «підресорений вантаж – колесо»

Диференціальне рівняння, що описує вертикальні коливання вантажу, має вигляд:

$$\ddot{\xi}(t) + \frac{c}{m}\xi(t) = u(t), \quad \xi(t_0) = \xi_0, \quad \dot{\xi}(t_0) = \dot{\xi}(t_0) = 0,$$

де  $c = 0.5 \text{ кг/с}^2$  – жорсткість пружної підвіски,  $u(t)$  – керуючий вплив.

У початковий момент часу відхилення від положення рівноваги становить  $\xi_0 = 10 \text{ см}$ .

#### Варіант 6.

Об'єктом керування є  $CR$  - ланка, у якій опір резистора дорівнює  $R = 50 \text{ кОм}$ , а ємність конденсатора  $C = 100 \text{ мкФ}$ . Принципова схема об'єкта наведена на рис. 2.6.

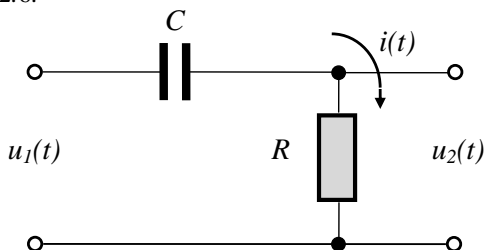


Рисунок 2.6 – Принципова схема динамічної системи « $CR$  - ланка»

Аналіз процесів в електричних ланцюгах дозволяє встановити, що падіння напруги на резисторі, яке є виходом даної системи, дорівнює різниці між вхідною напругою і напругою на конденсаторі  $u_c(t)$  :

$$u_2(t) = u_R(t) = u_1(t) - u_c(t).$$

Напруга  $u_R(t)$  визначає струм  $i(t) = \frac{1}{R} u_R(t)$ .

Заряд конденсатора визначається рівнянням  $q(t) = q_0 + \int_0^t i(\tau) d\tau$ .

Напруга на конденсаторі визначається його зарядом  $u_c(t) = \frac{1}{C} q(t)$ .

Таким чином, наведена схема забезпечує вироблення вихідної напруги, яка описується таким диференціальним рівнянням:

$$\frac{du_2(t)}{dt} + \frac{1}{RC} u_2(t) = \frac{du_1(t)}{dt}, \quad u_1(t_0) = u_1^0,$$

$$\frac{du_1(t_0)}{dt} = \frac{du_2(t_0)}{dt} = u_2(t_0) = 0.$$

У початковий момент часу вхідна напруга дорівнює  $u_1^0 = 20 \text{ В}$ .

### Варіант 7.

Об'єктом керування є жорстка плоска пластинка довжиною  $l = 5 \text{ м}$ , яка знаходиться в потоці газу, швидкість якого  $V = 2 \text{ м/с}$  спрямована уздовж серединної площини пластинки у незбуреному стані рівноваги. При відхиленні пластинки виникають аеродинамічні тиски, що залежать від кута відхилення  $\varphi$  (див. рис. 2.7).

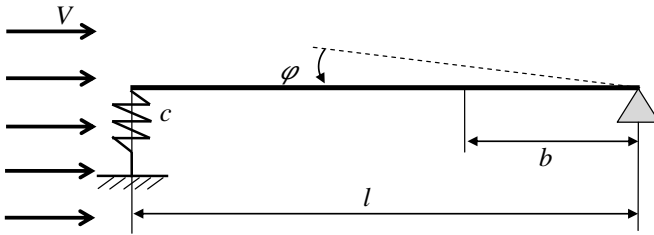


Рисунок 2.7 – Схема динамічної системи «пластина в потоці газу»

Нехай  $I = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$  – момент інерції пластинки відносно осі шарніра, тоді диференціальне рівняння руху буде мати вигляд:

$$I \cdot \ddot{\varphi}(t) + \left( c \cdot l - \frac{1}{2} k \cdot b \cdot \rho \cdot V^2 \right) \cdot l \cdot \varphi(t) = u(t),$$

$$\varphi(t_0) = \varphi_0, \quad \ddot{\varphi}(t_0) = 0,$$

де  $c = 0.3 \text{ кг/с}^2$  – коефіцієнт жорсткості пружини,  $k = 0.2 \text{ м} \cdot \text{с}^2$  – постійний аеродинамічний коефіцієнт,  $\rho = 2 \text{ кг/м}^3$  – щільність газу,  $b = 1 \text{ м}$  – відстань від осі шарніра, що визначає точку прикладення рівнодіючих аеродинамічних тисків на пластинку,  $u(t)$  – керуючий вплив.

У початковий момент часу відхилення від положення рівноваги становить  $\varphi_0 = 0,1^\circ$ .

*Варіант 8.*

Об'єктом керування є  $RL$ - ланка, у якій опір резистора дорівнює  $R = 1$  кОм, а індуктивність котушки  $L = 700$  Гн. Принципова схема об'єкта наведена на рис. 2.8.

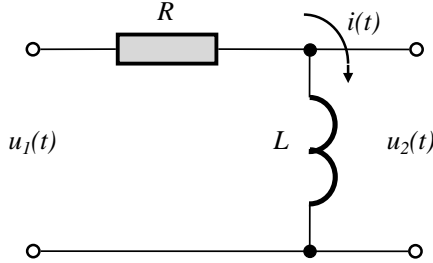


Рисунок 2.8 – Принципова схема динамічної системи «  $RL$  - ланка »

Аналіз процесів в електричних ланцюгах дозволяє встановити, що падіння напруги на індуктивності  $L$ , яке є виходом даної системи, дорівнює різниці між входною напругою  $u_1(t)$  і напругою на резисторі  $u_R(t)$ :

$$u_2(t) = u_L(t) = u_1(t) - u_R(t).$$

Напруга  $u_L(t)$  визначає струм  $i(t) = L \frac{di(t)}{dt}$ , який створює падіння напруги на резисторі  $u_R(t) = R \cdot i(t)$ .

Таким чином, наведена схема забезпечує вироблення вихідної напруги, яка описується таким диференціальним рівнянням:

$$\frac{du_2(t)}{dt} + \frac{R}{L} u_2(t) = \frac{du_1(t)}{dt},$$

$$u_1(t_0) = u_1^0, \quad \frac{du_1(t_0)}{dt} = \frac{du_2(t_0)}{dt} = u_2(t_0) = 0.$$

У початковий момент часу вхідна напруга дорівнює  $u_1^0 = 15$  В.

*Варіант 9.*

Об'єктом керування є вертикальний невагомий пружний стрижень довжиною  $l = 5$  м з постійною жорсткістю перетину  $E \cdot J = 2$  кг·м<sup>3</sup>/с<sup>2</sup>. З кінцем стрижня пов'язаний зосереджений вантаж масою  $m = 3$  кг. Верхньою



опорою стрижня служить нерухомий шарнір, а нижньою опорою - рухома втулка з шарикопідшипником (див. рис. 2.9).

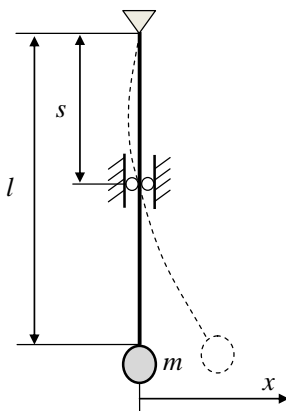


Рисунок 2.9 – Схема динамічної системи «стрижень – вантаж»

Стану рівноваги відповідає положення вантажу на вертикалі і прямолінійна форма осі стрижня. Нехай  $x(t)$  – горизонтальне відхилення вантажу від положення рівноваги в момент часу  $t$ . Якщо вантаж відхиляється, то вісь балки вигинається і подальший рух описується наступним диференціальним рівнянням:

$$\ddot{x}(t) + \frac{3 \cdot E \cdot J}{m \cdot l \cdot (l-s)^2} x(t) = u(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad \ddot{x}(t_0) = 0,$$

де  $s = 2$  м – відстань між опорами,  $u(t)$  – керуючий вплив.

У початковий момент часу відхилення вантажу від положення рівноваги становить  $x_0 = 10$  см.

#### Варіант 10.

Об'єктом керування є  $LRC$ - ланка, в якій індуктивність котушки дорівнює  $L = 300$  Гн, опір резистора дорівнює  $R = 500$  Ом, а ємність конденсатора  $C = 200$  мкФ. Принципова схема об'єкта наведена на рис. 2.10.

Аналіз процесів в електричних ланцюгах дозволяє встановити, що різниця між вхідною і вихідною напругою визначає сумарне падіння напруги

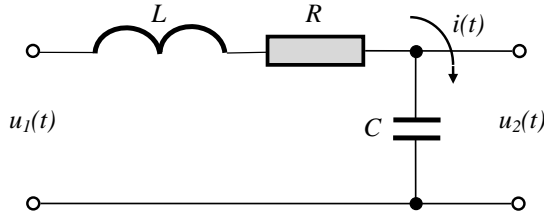


Рисунок 2.10 – Принципова схема системи «*LRC* - ланка»

на індуктивності і опорі  $u_1(t) - u_2(t) = u_L(t) + u_R(t)$ .

Напруга  $u_L(t)$  визначає струм  $i(t) = L \frac{di(t)}{dt}$ , який є однаковим для послідовно включених елементів ланцюга, тобто індуктивності і опору.

Заряд конденсатора визначається рівнянням  $q(t) = q_0 + \int_0^t i(\tau) d\tau$ .

Напруга на конденсаторі, яка визначається його зарядом, є виходом даної системи  $u_2(t) = u_C(t) = \frac{1}{C} q(t)$ .

Таким чином, наведена схема забезпечує вироблення вихідної напруги, яка описується таким диференціальним рівнянням:

$$\frac{L}{R} \frac{d^2 u_2(t)}{dt^2} + \frac{du_2(t)}{dt} + \frac{1}{RC} u_2(t) = \frac{1}{RC} u_1(t),$$

$$u_1(t_0) = u_1^0, \quad \frac{d^2 u_2(t_0)}{dt^2} = \frac{du_2(t_0)}{dt} = u_2(t_0) = 0.$$

У початковий момент часу вхідна напруга дорівнює  $u_1^0 = 25$  В.

### Варіант 11.

Об'єктом керування є динамічна система, яка складається з вантажу масою  $m = 5$  кг, пов'язаного з невагомою жорсткою балкою, один кінець якої закріплений на шарнірі, розташованому на нерухомій опорі (див. рис. 2.11).

Довжина балки дорівнює  $2l$ , де  $l = 3$  м,  $c = 2$  кг/с<sup>2</sup> – коефіцієнт жорсткості пружини.

Нехай  $\varphi(t)$  – це кут відхилення системи від положення рівноваги в

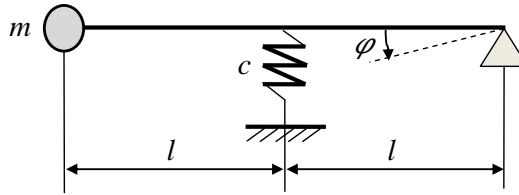


Рисунок 2.11 – Схема динамічної системи «вантаж-балка-пружина»

момент часу  $t$ . Якщо система відхиляється, то її рух описується наступним диференціальним рівнянням:

$$4 \cdot m \cdot \ddot{\varphi}(t) + c \cdot \varphi(t) = u(t), \quad \varphi(t_0) = \varphi_0, \quad \ddot{\varphi}(t_0) = 0,$$

де  $u(t)$  – керуючий вплив.

У початковий момент часу відхилення вантажу від положення рівноваги становить  $\varphi_0 = 2^\circ$ .

#### Варіант 12.

Об'єктом керування є  $CRL$ -ланка, в якій ємність конденсатора дорівнює  $C = 700$  мкФ, опір резистора дорівнює  $R = 3$  кОм, а індуктивність котушки дорівнює  $L = 5$  кГн. Принципова схема об'єкта наведена на рис. 2.12.

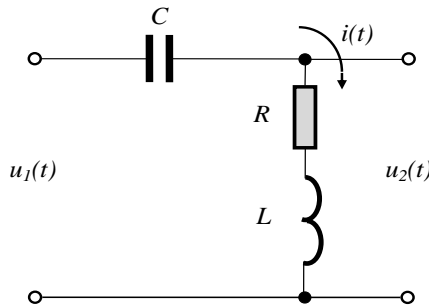


Рисунок 2.12 – Принципова схема динамічної системи « $CRL$ -ланка»

Аналіз процесів в електричних ланцюгах дозволяє встановити, що падіння напруги на резисторі і індуктивності, яке є виходом даної системи, дорівнює різниці між вхідною напругою  $u_1(t)$  і напругою на конденсаторі:  $u_c(t)$

$$u_2(t) = u_R(t) + u_L(t) = u_1(t) - u_C(t).$$

Напруга  $u_R(t)$  визначає струм:  $i(t) = \frac{1}{R} u_R(t)$ , який є однаковим для послідовно включених елементів ланцюга, тобто опору й індуктивності.

Заряд конденсатора визначається рівнянням  $q(t) = q_0 + \int_0^t i(\tau) d\tau$ .

Напруга на конденсаторі визначається його зарядом:  $u_C(t) = \frac{1}{C} q(t)$ .

Таким чином, наведена схема забезпечує вироблення вихідної напруги, яка описується таким диференціальним рівнянням:

$$\frac{L}{R} \frac{d^2 u_2(t)}{dt^2} + \frac{du_2(t)}{dt} + \frac{1}{RC} u_2(t) = \frac{du_1(t)}{dt} - \frac{1}{RC} u_1(t),$$

$$u_1(t_0) = u_1^0, \quad \frac{d^2 u_2(t_0)}{dt^2} = \frac{du_2(t_0)}{dt} = u_2(t_0) = \frac{du_1(t)}{dt} = 0.$$

У початковий момент часу вхідний напруга дорівнює  $u_1^0 = 10$  В.

### Варіант 13.

Об'єктом керування є шматок пробки у формі паралелепіпеда висотою  $H = 1$  м з площею основи  $S = 0.4 \text{ м}^2$ , який плаває у воді (див. рис. 2.13).

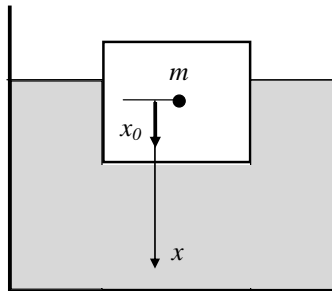


Рисунок 2.13 – Схема динамічної системи «вода – пробка»

Щільність води дорівнює  $\rho_e = 1000 \text{ кг/м}^3$ , щільність пробки –  $\rho_n = 200 \text{ кг/м}^3$ . Сила опору води пропорційна швидкості руху пробки і

дорівнює  $F_c = -r \cdot v(t)$ , де  $r=100$  кг/с – коефіцієнт пропорційності. Якщо пробка під впливом зовнішніх сил занурюється у воду, то вона починає робити коливання. Тоді рух пробки описується наступним диференціальним рівнянням:

$$\ddot{x}(t) + \frac{r}{m} \dot{x}(t) + \frac{\rho_a \cdot g}{\rho_n \cdot H} x(t) = u(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = \ddot{x}(t_0) = 0,$$

де  $m$  – маса пробки,  $g$  – прискорення вільного падіння,  $u(t)$  – керуючий вплив.

Пробку занурюють у воду на глибину  $x_0 = 5$  см і відпускають.

#### Варіант 14.

Об'єктом керування є  $CLR$ -ланка, в якій ємність конденсатора дорівнює  $C = 700$  мкФ, індуктивність котушки дорівнює  $L = 500$  Гн, а опір резистора дорівнює  $R = 300$  Ом. Принципова схема об'єкта наведена на рис. 2.14.

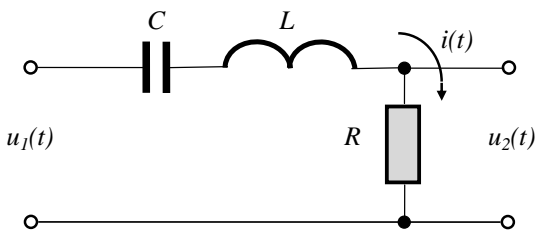


Рисунок 2.14 – Принципова схема системи « $CLR$  - ланка»

Аналіз процесів в електричних ланцюгах дозволяє встановити, що падіння напруги на резисторі, яке і є виходом даної системи, дорівнює різниці між вхідною напругою і падінням напруги на конденсаторі й індуктивності:

$$u_2(t) = u_R(t) = u_1(t) - u_C(t) - u_L(t).$$

Напруга  $u_L(t)$  визначає струм  $u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$ , який є однаковим для послідовно включених елементів ланки. Заряд конденсатора визначається

рівнянням:  $q(t) = q_0 + \int_0^t i(\tau) d\tau$ . Напруга на конденсаторі визначається його

зарядом:  $u_c(t) = \frac{1}{C} q(t)$ .

Таким чином, наведена схема забезпечує вироблення вихідної напруги, яка описується таким диференціальним рівнянням:

$$\frac{d^2 u_2(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_2(t)}{dt} + \frac{1}{LC} u_2(t) = \frac{R}{L} \frac{du_1(t)}{dt},$$

$$\frac{du_1(t_0)}{dt} = \Delta u_1^0, \quad \frac{d^2 u_2(t_0)}{dt^2} = \frac{du_2(t_0)}{dt} = u_2(t_0) = 0.$$

У початковий момент часу швидкість зміни вхідної напруги дорівнює  $\Delta u_1^0 = 1\text{В}$ .

#### Варіант 15.

Об'єктом керування є матеріальна точкова маса  $m = 1\text{ кг}$ , яка знаходиться в полі тяжіння тонкого кільця маси  $M = 10^{20}\text{ кг}$  і радіуса  $R = 5\text{ км}$ . Якщо точкова маса переміщується в точку, розташовану на осі кільця на відстані  $x_0 < R$  від площини кільця (див. рис. 2.15), то вона починає здійснювати коливальні рухи.

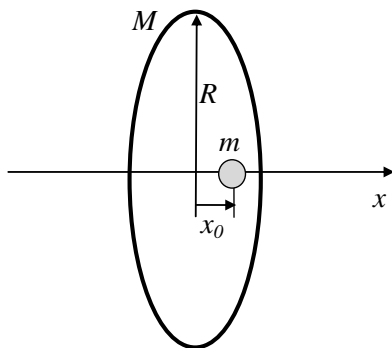


Рисунок 2.15 – Схема динамічної системи «точкова маса – кільце»

Якщо  $x_0 < 0,1 \cdot R$ , то рух точкової маси описується наступним диференціальним рівнянням:

$$m \cdot \ddot{x}(t) + \frac{G \cdot M \cdot m}{R^3} x(t) = u(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad \ddot{x}(t_0) = 0,$$

де  $G = 6,67234 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$  – гравітаційна постійна (постійна Ньютона),  $u(t)$  – керуючий вплив. В початковий момент часу  $x_0 = 1 \text{ м}$ .

### Варіант 16.

Об'єктом керування є інерційна інтегруюча ланка, яка зібрана на двох операційних підсилювачах, принципова схема якої наведена на рис. 2.16.

Аналіз процесів в електричних ланцюгах дозволяє встановити, що вихідна напруга  $u_2(t)$  дорівнює різниці між вхідною напругою  $u_1(t)$  і падінням напруги на даній ділянці ланцюга. Падіння напруги на резисторі

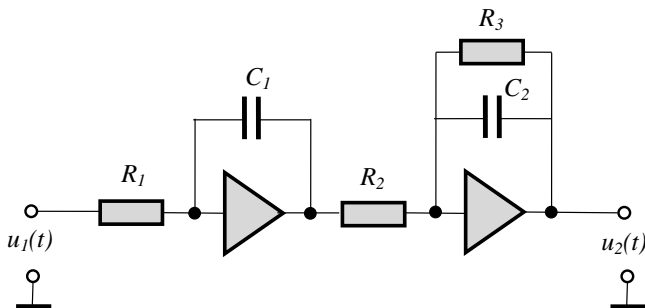


Рисунок 2.16 – Принципова схема інерційної інтегруючої ланки

$u_R(t)$  визначає струм  $i(t) = \frac{1}{R} u_R(t)$ , який є однаковим для послідовно включених елементів ланцюга.

Заряд конденсатора визначається рівнянням  $q(t) = q_0 + \int_0^t i(\tau) d\tau$ , а

напруга на конденсаторі визначається його зарядом:  $u_c(t) = \frac{1}{C} q(t)$ .

Таким чином, наведена схема забезпечує вироблення вихідної напруги  $u_2(t)$ , яка описується таким диференціальним рівнянням:

$$R_3 C_2 \frac{d^2 u_2(t)}{dt^2} + \frac{du_2(t)}{dt} = \frac{R_3}{C_1 R_1 R_2} u_1(t),$$

$$u_1(t_0) = u_1^0, \quad \frac{d^2 u_2(t_0)}{dt^2} = \frac{du_2(t_0)}{dt}(t_0) = u_2(t_0) = 0.$$

Опір резисторів дорівнює  $R_1 = 5$  кОм,  $R_2 = 10$  кОм, а  $R_3 = 20$  кОм. Ємність конденсаторів дорівнює  $C_1 = 0,5$  мкФ,  $C_2 = 0,8$  мкФ. Вхідна напруга в початковий момент часу дорівнює  $u_1^0 = 20$  В.

#### Варіант 17.

Об'єктом керування є динамічна система, зображена на рис. 2.17, яка являє собою вертикальну циліндричну трубку, закриту з нижнього кінця, всередині якої може переміщатися без тертя поршень, маса якого  $m = 10$  кг є великою порівняно з масою ідеального газу, який знаходиться всередині трубки. Площа поперечного перетину трубки дорівнює  $S = 0,2$  м<sup>2</sup>, на поршень діє нормальний атмосферний тиск  $\rho_0 = 760$  мм рт.ст. (100 кПа).

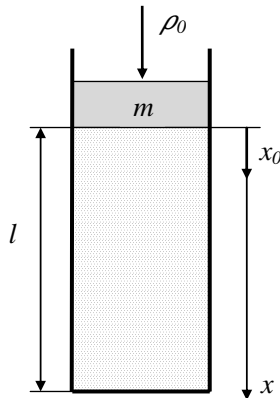


Рисунок 2.17 – Схема динамічної системи «поршень – газ»

У положенні рівноваги відстань між поршнем і дном трубки одно  $l = 800$  м. Якщо поршень відхиляється від положення рівноваги на відстань



$x_0 \ll l$ , він починає робити коливання, що описуються наступним диференціальним рівнянням:

$$m \cdot \ddot{x}(t) + \frac{m \cdot g + \rho_0 \cdot S}{l} x(t) = u(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad \ddot{x}(t_0) = 0,$$

де  $g$  – прискорення вільного падіння,  $u(t)$  – керуючий вплив.

В початковий момент часу поршень відхиляється від положення рівноваги на величину  $x_0 = 3$  м.

### Варіант 18.

Об'єктом керування є інерційна диференціююча ланка, яка зібрана на операційному підсилювачі, принципова схема якої наведена на рис. 2.18.

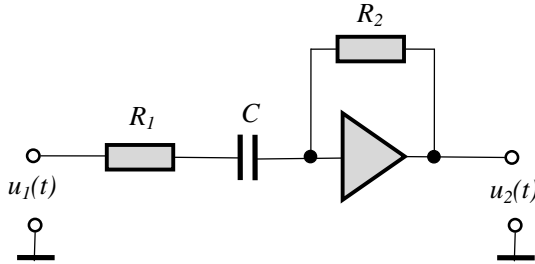


Рисунок 2.18 – Принципова схема інерційної диференціюючої ланки

Аналіз процесів в електричних ланцюгах дозволяє встановити, що вихідна напруга дорівнює різниці між вхідною напругою і падінням напруги на даній ділянці ланцюга. Падіння напруги на резисторі визначає струм

$$i(t) = \frac{1}{R} u_k(t), \text{ який є однаковим для послідовно включених елементів ланки.}$$

Заряд конденсатора визначається рівнянням  $q(t) = q_0 + \int_0^t i(\tau) d\tau$ , а

напруга на конденсаторі визначається його зарядом  $u_c(t) = \frac{1}{C} q(t)$ .

Таким чином, наведена схема забезпечує вироблення вихідної напруги  $u_2(t)$ , яка описується таким диференціальним рівнянням:

$$(R_1 + R_2) \cdot C \cdot \frac{du_2(t)}{dt} + u_2(t) = R_2 \cdot C \cdot \frac{du_1(t)}{dt},$$

$$\frac{du_1(t_0)}{dt} = \Delta u_1^0, \quad \frac{du_2(t_0)}{dt}(t_0) = u_2(t_0) = 0.$$

Опір резисторів дорівнює  $R_1 = 15 \text{ кОм}$ ,  $R_2 = 25 \text{ кОм}$ . Ємність конденсатора дорівнює  $C = 100 \text{ мкФ}$ . Швидкість зміни вхідного напруги в початковий момент часу дорівнює  $\Delta u_1^0 = 2 \text{ В}$ .

### 3 ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ РОЗРАХУНКОВОГО ЗАВДАННЯ

Нехай об'єктом керування є динамічна система, що складається з двох вантажів з масами  $m_1 = 1$  кг і  $m_2 = 2$  кг, які з'єднані двома пружинами, жорсткості яких дорівнюють  $c_1 = 2$  кг/с<sup>2</sup> і  $c_2 = 1$  кг/с<sup>2</sup> (див. рис. 3.1).

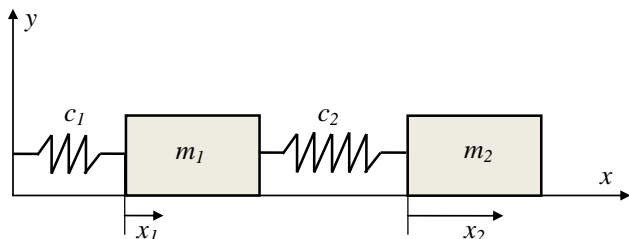


Рисунок 3.1 – Схема динамічної системи «два вантажа, які з'єднані пружинами»

Нехай  $x_1(t)$  і  $x_2(t)$  – це горизонтальне відхилення першого та другого вантажів від положення рівноваги в момент часу  $t$ . Тоді рух вантажів описується наступними диференціальними рівняннями:

$$m_1 \ddot{x}_1(t) + (c_1 + c_2)x_1(t) - c_2 x_2(t) = u(t), \quad x_1(t_0) = 0, \quad \dot{x}_1(t_0) = \ddot{x}_1(t_0) = 0,$$

$$m_2 \ddot{x}_2(t) + c_2 x_2(t) - c_2 x_1(t) = 0, \quad x_2(t_0) = x_2^0, \quad \dot{x}_2(t_0) = \ddot{x}_2(t_0) = 0,$$

де  $u(t)$  – керуючий вплив.

Виходом об'єкта вважається переміщення другого вантажу  $x_2(t)$ . У початковий момент часу відхилення другого вантажу від положення рівноваги становить  $x_2^0 = 50$  см.

Послідовність виконання розрахункового завдання

1. Для того, щоб знайти передавальну функцію системи, спочатку обчислимо перетворення Лапласа від лівих та правих частин диференціальних рівнянь

$$m_1 s^2 X_1(s) + (c_1 + c_2)X_1(s) - c_2 X_2(s) = U(s),$$

$$m_2 s^2 X_2(s) + c_2 X_2(s) - c_2 X_1(s) = 0,$$

виразимо змінну  $X_1(s)$  з другого рівняння та підставимо в перше:

$$\frac{m_1 m_2}{c_2} s^4 X_2(s) + \left( m_1 + m_2 \left( \frac{c_1}{c_2} + 1 \right) \right) s^2 X_2(s) + c_1 X_2(s) = U(s).$$

Оскільки виходом об'єкта є змінна  $X_2(s)$ , то передавальна функція буде мати вигляд

$$W(s) = \frac{X_2(s)}{U(s)} = \frac{1}{\frac{m_1 m_2}{c_2} s^4 + \left( m_1 + m_2 \left( \frac{c_1}{c_2} + 1 \right) \right) s^2 + c_1}.$$

Після приведення до стандартного виду отримаємо:

$$W(s) = \frac{\frac{m_1 m_2}{c_2}}{s^4 + \left( \frac{c_1}{m_1} + c_2 \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \right) s^2 + \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2}}.$$

2. Для побудови графіка перехідної характеристики об'єкта впродовж 50 секунд при нульових початкових умовах і дослідження впливу величини жорсткості першої пружини  $c_1$  створимо наступний m-файл:

```
>> m1 = 1; m2 = 2;
>> c1 = 2; c2 = 1;
>> num = m1*m2/c2;
>> figure (1);
>> string1 = ['b', 'r', 'g'];
>> string2 = ['-',':', '-.'];
>> for i = 1:1:3
>>     c1 = c1+0.5*(i-1);
>>     den=[1 0 c1/m1+c2*(1/m1+1/m2) 0 c1*c2/(m1*m2)];
>>     f = tf ( num, den );
>>     step(f, strcat(string1(i), string2(i)), 50);
>>     hold on;
>> end;
>> legend ('c_1 = 1.0', 'c_1 = 1.5', 'c_1 = 2.0');
```

Результат зображено на рис. 3.2.

Аналіз графіка дозволяє зробити висновки, що при дії одиничного сигналу на виході системи встановлюються автоколивання, а при збільшенні

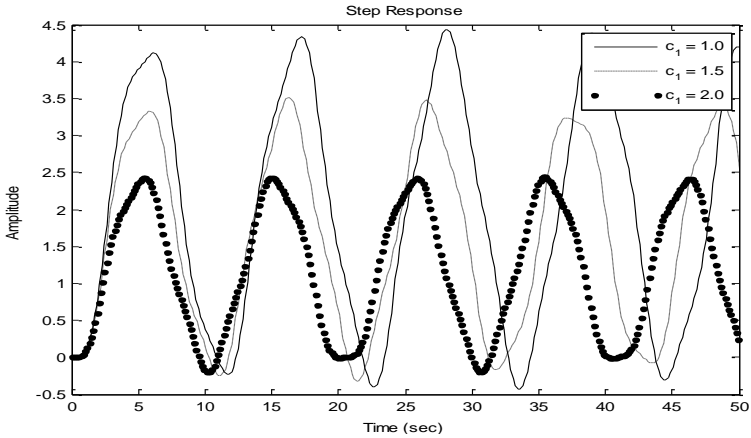


Рисунок 3.2 – Графік впливу жорсткості пружини  $c_1$  на вид перехідної характеристики об'єкта

жорсткості пружини зменшуються амплітуда та період коливань другого вантажу.

3. Для побудови амплітудно-частотних характеристик об'єкта створимо наступний m-файл:

```
>> c1 = 2;
>> den = [1 0 c1/m1+c2*(1/m1+1/m2) 0 c1*c2/(m1*m2)];
>> system = tf ( num, den );
>> figure (2);
>> bode ( system );
>> grid on;
```

Результат зображено на рис. 3.3. Аналіз отриманих графіків дозволяє встановити, що досліджуваний діапазон частот, у якому змінюються характеристики об'єкта складає  $[0^{-1} \ 10^1]$  рад/сек

Для дослідження впливу маси  $m_2$  на вид логарифмічної амплітудно-частотної характеристики об'єкта створимо наступний m-файл:

```
>> figure (3);
>> for i = 1:1:3
>>     m2 = m2+0.5*(i-1);
>>     num = m1*m2/c2;
```

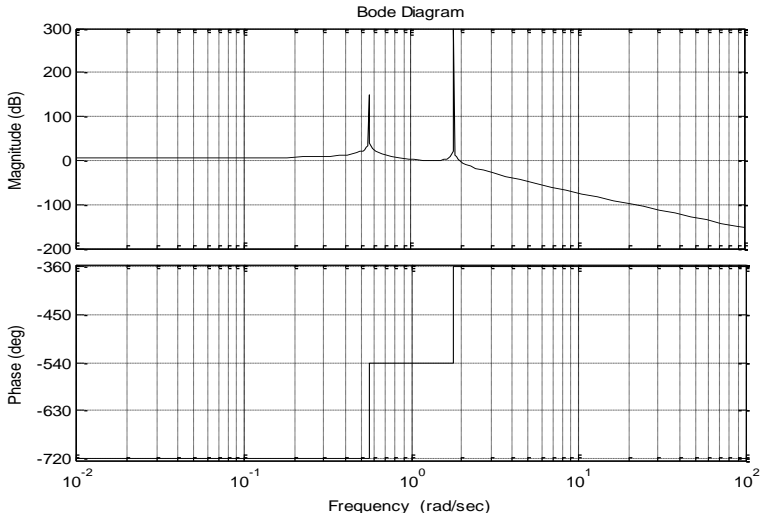


Рисунок 3.3 – Графік логарифмічних АЧХ та ФЧХ об'єкта

```
>> den=[1 0 c1/m1+c2*(1/m1+1/m2) 0 c1*c2/(m1*m2)];
>> system = tf ( num, den );
>> w = logspace (-1, 1, 5000);
>> r = freqresp(system, w);
>> r = r(:);
>> loglog(w,abs(r),strcat(string1(i),string2(i)));
>> hold on;
>> end;
>> legend ('m_2 = 2.0', 'm_2 = 2.5', 'm_2 = 3.0');
```

Результат зображено на рис. 3.4.

Аналіз графіка дозволяє зробити висновок, що об'єкт є фільтром низьких частот з двома резонансними частотами. При збільшенні маси другого вантажу збільшується коефіцієнт передачі на низьких частотах та зменшується значення першої резонансної частоти.

4. Для розв'язання задачі реалізації об'єкта в просторі станів у вигляді канонічної нормальної форми треба визначити, чи має нулі передавальна функція об'єкта. В нашому випадку ступінь полінома в чисельнику дорівнює нулю, тобто ПФ нулів не має.

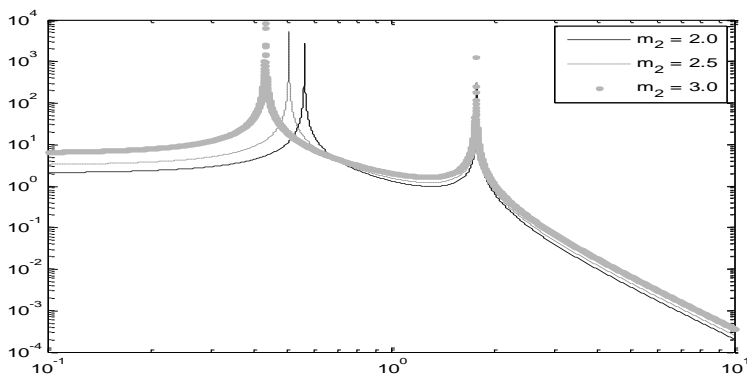


Рисунок 3.4 – Графік впливу маси вантажу  $m_2$  на вид ЛА ЧХ об'єкта

Модель системи у просторі станів має вигляд 
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t), \\ y(t) = \mathbf{C}x(t), \end{cases}$$

а матриці у нормальній формі мають такі значення:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{c_1 c_2}{m_1 m_2} & 0 & -\frac{c_1}{m_1} - c_2 \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{m_1 m_2}{c_2} \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

5. Щоб нарисувати структурну схему отриманої реалізації, треба записати рівняння моделі для кожної змінної:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t),$$

$$\dot{x}_2(t) = x_3(t),$$

$$\dot{x}_3(t) = x_4(t),$$

$$\dot{x}_4(t) = -\frac{c_1 c_2}{m_1 m_2} x_1(t) - \left( \frac{c_1}{m_1} + c_2 \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \right) x_3(t) + \frac{m_1 m_2}{c_2} u(t),$$

$$y(t) = x_1(t).$$

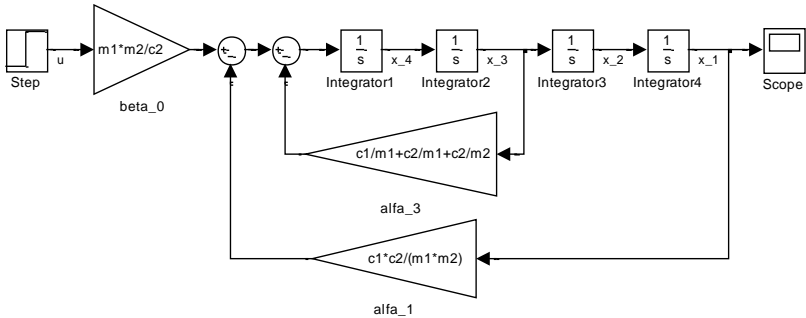


Рисунок 3.5 – Структурна схема об'єкта керування

6. Для побудови моделі у просторі станів створимо наступний m-файл:

```
>> A = [ 0 1 0 0; ...
        0 0 1 0; ...
        0 0 0 1; ...
        -c1*c2/(m1*m2) 0 -c1/m1-c2*(1/m1+1/m2) 0];
>> B = [ 0; 0; 0; m1*m2/c2];
>> C = [1 0 0 0];
>> system_ss = ss ( A, B, C, 0 );
```

Для побудови графіка руху об'єкта при заданих ненульових початкових умовах  $x_2^0 = 50$  см створимо наступний m-файл:

```
>> x0 = [ 0; 0; 0; 0.5];
>> t = 0:0.01:50;
>> u = zeros(1, length(t));
>> figure (4);
>> lsim (system_ss, u, t, x0 );
```

Результат зображено на рис. 3.6.

7. Для перевірки виконання умови керованості застосуємо алгебраїчний критерій: об'єкт є керованим, якщо ранг матриці керованості Калмана дорівнює порядку системи.

Створимо наступний m-файл:

```
>> Kalman = [B A*B A*A*B A*A*A*B];
>> r = rank ( Kalman )
```



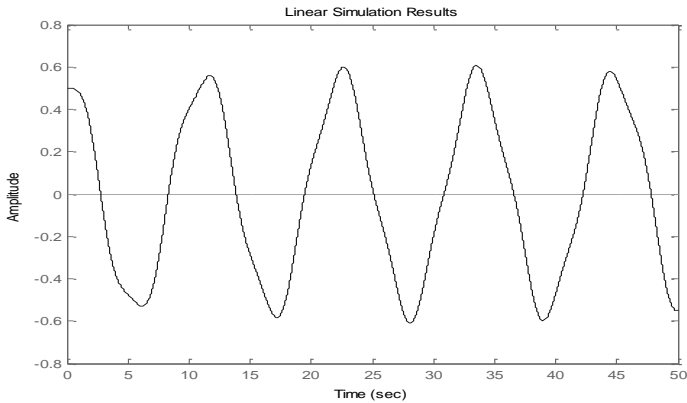


Рисунок 3.6 – Графік руху об'єкта при ненульових початкових умовах

В результаті отримаємо наступну відповідь:

$$r = 4$$

Таким чином, об'єкт є керованим.

8. Треба розв'язати задачу модального керування так, щоб виконувалися наступні вимоги до якості перехідного процесу в замкненій системі:

- а) точність  $\varepsilon = 1$  см;
- б) тривалість перехідного процесу не більше  $T_{\Pi} = 20$  с;
- в) коливальність дорівнює  $\mu = 1$ .

Виходячи з заданих вимог, виберемо розташування полюсів замкненої системи:

$$\operatorname{Re} \lambda_i^* < -\frac{\ln \varepsilon}{T_{\Pi}} = -\frac{\ln 0.01}{20} = -0.23.$$

$$\mu = 1 = \operatorname{tg} \frac{|\operatorname{Im} \lambda_i^*|}{|\operatorname{Re} \lambda_i^*|} \Rightarrow |\operatorname{Im} \lambda_i^*| = |\operatorname{Re} \lambda_i^*|, \quad i = \overline{1,4}.$$

Остаточно обираємо такі значення:  $\lambda_{1,2}^* = -0.25 \pm 0.25i$ ,  $\lambda_3^* = -1$ ,  $\lambda_4^* = -2$ .

Обчислимо коефіцієнти бажаного характеристичного полінома замкненої системи:

$$\alpha^*(s) = (s - \lambda_1^*)(s - \lambda_2^*)(s - \lambda_3^*)(s - \lambda_4^*) = s^4 + 3.5s^3 + 3.625s^2 + 1.375s + 0.25.$$

Обчислимо коефіцієнти характеристичного полінома об'єкта:

$$\alpha(s) = s^4 + \left( \frac{c_1}{m_1} + c_2 \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \right) s^2 + \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2} = s^4 + 3.5s^2 + 1,$$

$$\beta_0 = \frac{m_1 m_2}{c_2} = 2.$$

За формулою (4.4) обчислимо коефіцієнти зворотного зв'язку:

$$k_1 = \frac{0.25 - 1}{2} = -0.375, \quad k_2 = \frac{1.375 - 0}{2} = 0.6875,$$

$$k_3 = \frac{3.625 - 3.5}{2} = 0.0625, \quad k_4 = \frac{3.5 - 0}{2} = 1.75.$$

Таким чином, матриця коефіцієнтів зворотного зв'язку має вигляд:

$$K^T = \begin{bmatrix} -0.375 & 0.6875 & 0.0625 & 1.75 \end{bmatrix}.$$

9. Для побудови графіка перехідного процесу в замкненій системі створимо наступний m-файл:

```
>> K = [-0.375 0.6875 0.0625 1.75];
>> A1 = A - B*K;
>> system_feedback = ss ( A1, B, C, 0 );
>> figure (5);
>> step ( system_feedback );
```

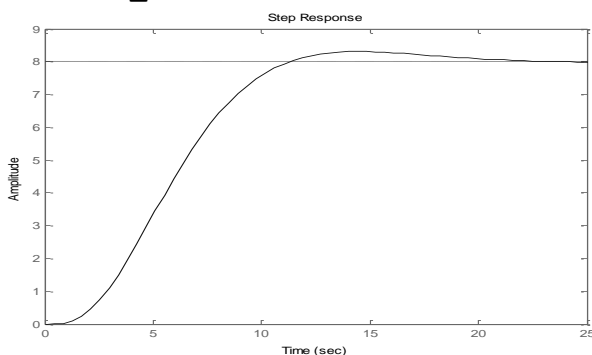


Рисунок 3.7 – Графік перехідного процесу в замкненій системі

Таким чином, після замкнення об'єкта зворотним зв'язком з матрицею коефіцієнтів  $K^T$  отримано стійку систему, в якій характеристики перехідного процесу відповідають заданим вимогам.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бесекерский В.А. Теория автоматического регулирования / В.А. Бесекерский, Е.П. Попов. – М.: Наука, Главная редакция физ.-мат. литературы, 1975. – 768 с.
2. Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами / Ю.Н. Андреев. – М.: Наука, 1976. – 424 с.
3. Воронов А.А. Введение в динамику сложных управляемых систем / А.А. Воронов. – М.: Наука, 1985. – 352 с.
4. Медведев В.С. Control System Toolbox. MATLAB 5 для студентов / В.С. Медведев, В.Г. Потемкин. – М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 1999. – 287 с.
5. Андриевский Б.Р. Избранные главы теории автоматического управления с примерами на языке MATLAB / Б.Р. Андриевский, А.Л. Фрадков. – СПб: Наука, 1999. – 475 с.
6. Григорьев В.В. Синтез систем автоматического управления методом модального управления / В.В. Григорьев, Н.В. Журавлёва, Г.В. Лукьянова, К.А. Сергеев. – СПб: СПбГУ ИТМО, 2007. – 108 с.

## ЗМІСТ

ВСТУП .....	3
1. ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ .....	4
1.1. Математичні моделі лінійних динамічних систем .....	4
1.2. Часові характеристики лінійних динамічних систем .....	7
1.3. Частотні характеристики лінійних динамічних систем .....	9
1.4. Оформлення графіків в MATLAB .....	12
1.5. Задача модального керування .....	13
2. ВАРІАНТИ РОЗРАХУНКОВОГО ЗАВДАННЯ .....	16
3. ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ РОЗРАХУНКОВОГО ЗАВДАННЯ .....	35
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ .....	43

Навчальне видання

## МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання розрахункового завдання

«Побудова математичних моделей динамічних систем

та розв'язання задачі модального керування»

з курсу «Теорія керування»

для студентів напрямків 6.040301 «Прикладна математика»,

6.040302 «Інформатика» та 6.040303 «Системний аналіз»

У к л а д а ч і:

ДОРОФЄЄВ Юрій Іванович

КОСТЮК Ольга Василівна

Відповідальний за випуск О.С. Куценко

Роботу до видання рекомендував М.І. Безменов

В авторській редакції

План 2012, поз. 14.

Підп. до друку 05.02.2013. Формат 60×84 1/16. Папір офсетний.

Riso-друк. Гарнітура Таймс. Ум. друк. арк. 2,6. Наклад 50 прим.

Зам. № 179. Ціна договірна

---

Видавець і виготовлювач

Видавничий центр НТУ «ХПІ»,

вул. Фрунзе, 21, м. Харків, 61002

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3657 від 24.12.2009 р.